ZERO ... SIA NATURALE !

CARMELO DI STEFANO

I.T.G " E.MAJORANA" - GELA.

§0. <u>Introduzione.</u>

> *«Convenite allora con me che lo zero - questo figlio tardivo del nulla - non solo è necessario, ma di un valore inestimabile allo sviluppo incessante della scienza matematica»*
>
> *Cipolla M., [C., pag.10]*

Il presente lavoro trae origine da una mia vecchia curiosità. Nella lettura di diversi testi di matematica (da quelli scolastici a quelli specialistici, dai classici ai lavori più recenti) ho notato che l'appartenenza o meno dello zero all'insieme dei numeri naturali appariva come una specie di opinione personale dei vari autori, comunque non esplicitata né giustificata. Questa mancanza forse dipende dalla inutilità di porsi il problema o dalla presunta impossibilità di ottenere risposte esaurienti e definitive o quantomeno convincenti. Quel che più ha stimolato il mio interesse sono state proprio le mancate spiegazioni di un tale comportamento; da qui è nata quindi la frenetica, ma approfondita, consultazione di testi che in un modo o nell'altro trattano l'argomento.

Quest'articolo vuole essere quindi, da una parte un viaggio attraverso i classici della matematica che hanno avuto come tema più o meno trainante proprio l'esistenza dello zero, dapprima come cifra e poi come numero a tutti gli effetti; e d'altro canto anche un tentativo serio di trovare pro e contro al fatto che lo zero debba essere o meno considerato un numero naturale.

Non essendo uno storico mi servirò di frequenti citazioni dei più autorevoli studiosi del settore, soprattutto nella prima parte che riguarderà lo zero come puro simbolo.

§1. <u>Zero: mancanza di segno o segno di una mancanza?</u>

> *«Notevoli difficoltà sono associate alla classe nulla, e generalmente all'idea di niente. È chiaro che esiste un concetto niente, e che in un certo senso niente è qualcosa. In effetti, la proposizione "niente non è niente" è indubbiamente suscettibile di una interpretazione che la rende vera»* .
>
> *Bertrand Russel, [R, pag.96]*

Innanzitutto ritengo doveroso segnalare che lo zero può essere considerato un numero indicante la cardinalità dell’insieme vuoto, ma anche un simbolo denotante il concetto di niente e ancora un modo di dire (Sei uno zero!) e molte altre cose che verranno trattate in seguito. Tutti questi diversi “punti di vista” hanno evidentemente l’idea di zero a fondamento comune.

Mi è parso oltremodo opportuno iniziare l’indagine attraverso la storia delle Matematiche partendo proprio dallo zero inteso come simbolo. La prima domanda che mi è sorta a questo proposito, è stata proprio quella che denomina il presente paragrafo e che è stata formulata da Giulio Giorello nella stesura dell'omonima voce sull'Enciclopedia Einaudi [G] (proprio questo lavoro mi ha fornito molti spunti).

Da un punto di vista strettamente storico, come già evidenziato in [Di, pag.375-6] non possono farsi altro che congetture sui perché della nascita del concetto di numero. Tali ipotesi potrebbero essere in qualche modo confortate da studi fatti su popolazioni che tuttora vivono in condizioni primitive, ma non ritengo necessaria una precisa presa di posizione a tale avviso. È invece interessante osservare che il numero è stato fuor di dubbio uno dei primi concetti matematici ad essere sviluppati.

Risulta altresì importante stabilire se la caratterizzazione dei numeri sia avvenuta dapprima mediante la creazione del “nome” e poi del “simbolo” o viceversa (ma anche questo è un insondabile mistero). Essendo però un problema considerato fondamentale per l'impostazione di questo studio è necessario fare una scelta, ovviamente giustificata. La mia posizione è a favore di una preminenza temporale del “simbolo” sul “nome”; dove per “simbolo” non deve certo considerarsi l'ideogramma o la “cifra” (in tal caso è mio parere pensare che abbia predominanza temporale il nome), quanto piuttosto la tacca apposta per “contare” più che per enumerare. La tacca serve infatti a registrare il passaggio di un animale nel recinto, non a determinare la quantità di animali che il pastore possiede; egli non ha infatti bisogno di sapere il loro “numero” poiché “conosce” i propri animali, sente il loro numero, avverte la presenza o la mancanza di un determinato animale. Un po' come quegli *idiots savants* con particolari predisposizioni matematiche, che appunto “sentono” il numero degli oggetti.

Proprio su questo problema è interessante segnalare quanto detto in [Da, pag.3] in cui si parla di *“senso del numero”* e si rileva che «*non bisogna confondere il senso del numero con il contare che probabilmente è venuto assai dopo ed implica [...] un processo mentale piuttosto complicato. [...] L’atto del contare trasformò la nozione concreta, e perciò eterogenea, di pluralità, così caratteristica nell’uomo primitivo, nel concetto omogeneo ed astratto di numero che rese possibile la mate-*

matica.»[1] Quest'ultima idea mi convince, ma come e quando si raggiunge l'astrazione numerica dello zero?

L'avvertimento della mancanza può essere trasformato da pura sensazione a "legittimazione" solo da intelligenze superiori a quelle primitive, menti cioè che hanno imparato a trasformare il semplice registrare in vera e propria enumerazione. Queste intelligenze sono riuscite a creare la nozione di numero almeno come etichetta, come identificatore di tutti gli insiemi fra di loro equipotenti. Invece a livello di sviluppo primitivo la mancanza, che si badi bene non è ancora lo zero, può essere registrata "cancellando" la tacca che in qualche modo era associata all'animale od oggetto che fosse. Tale "cancellazione" chiaramente spiana la strada all'operazione di sottrazione senza che vi sia contemporaneamente la necessità di "riconoscere" la nozione di zero. Questa esigenza può sorgere nel momento in cui tutti gli oggetti o animali siano perduti, ma in tal caso io credo che la mente primitiva non senta ovviamente alcun interesse a catalogare ciò che non ha più.

Da questo punto di vista si assiste anche ad un paradosso storico, poiché la consapevolezza che bisogna misurare anche la mancanza fa sì che risulti naturale la misurazione del debito (con la creazione quindi dei negativi), senza che analoga necessità venga avvertita per lo zero. È evidente, come mostrerò in seguito, che ciò ha provocato ripercussioni sulla creazione di un simbolo per lo zero. Mi sembra altresì interessante annotare il seguente parere: [Bk, pag.87] *«si può immaginare la notevole sensazione di disagio che deve essersi prodotta quando i Babilonesi, volendo poter indicare il risultato della sottrazione di un numero da se stesso, introdussero un simbolo per lo zero e infine cominciarono a trattarlo proprio come se fosse un numero intero. Lo zero sembra simile al vuoto, al nulla; com'è possibile, allora, riferirsi legittimamente allo zero come se fosse qualcosa, un numero autentico? Senza dubbio questo disagio si attenuò a poco a poco, quando si cominciò a capire che lo zero va appunto bene per contare il numero degli animali in un campo vuoto o il numero dei re durante un periodo repubblicano.»* Il contare gli elementi di un insieme vuoto è ovviamente un "gioco" intellettuale molto raffinato; il suo riconoscimento avverrà pertanto a fatica.

Quindi io penso che, almeno ad un primo stadio di civiltà, lo zero non sia riconosciuto come *segno di una mancanza*, poiché è proprio tale necessità che non è compresa.

Quando invece la matematica si sviluppa al punto da cominciare a creare le cifre con i conseguenti simboli ad esse associati (il che accade probabilmente con i Sumeri alcune migliaia di anni fa), potrebbe sentirsi l'utilità di usare un simbolo per annotare una *mancanza*. Ma anche in questo periodo senza un'adeguata notazione posizionale ed una opportuna scelta delle cifre lo zero non è ancora ritenuto "necessario". Finché anche il contare rimane legato strettamente ad una corrispondenza biunivoca con oggetti concreti, è oltremodo difficile e forse anche inutile, considerare la no-

---

(1) Nello stesso lavoro [Da, pag.263-4] questa intuizione viene sapientemente sondata.

zione di zero. È quando il contare comincia a divenire attività astratta ed in qualche modo automatismo incontrollato, per cui anche il bambino privo di alcuna nozione matematica ripete una successione disordinata di nomi che egli "sente" essere simili, che potrebbe essere accettato lo zero. Si osservi che in quest'ultimo esempio, nonostante le incoerenze di ordine psicologico legate al disordine od alla ripetizione di nomi nella successione, che è e rimane sempre solo una "cantilena", siamo ad uno stadio logico avanzato. Si noti altresì che lo zero potrebbe essere accettato da menti non molto vivaci ma solo come puro nome, quindi non come segnalatore d'alcunché, fosse pure la mancanza. Infine il numero può essere considerato come aggettivo (tre pecore) e come sostantivo (il tre), appare probabile, da quanto detto, che è proprio la sua natura di aggettivo a sorgere come primaria esigenza per tutti i numeri interi tranne che per lo zero. Infatti l'idea dello zero come "concretizzazione" della morte dell'agnello divorato dai lupi, che quindi non c'è più, risulta un'idea più immediata nel pastore primitivo di quella di avere zero pecore.

§2. <u>Cenni storici.</u>

«La mente concreta degli antichi greci non poteva concepire il vuoto come un numero e tanto meno attribuire al vuoto un simbolo».

Tobias Dantzig, [Da, pag.34]

Dal punto di vista storico la comparsa di un simbolo per lo zero avviene in epoca molto tarda rispetto allo sviluppo dell'aritmetica ed è strettamente collegata ai problemi sollevati dalla creazione della notazione posizionale, per la quale era fondamentale distinguere per esempio fra i numeri 232, 2032 e 2302. Ciò è notato da parecchi storici per la prima volta nella matematica babilonese [N, pagg.35-6; O, pagg.16,18-19; Bo, pag.32], anche se nella prima fase lo zero non è mai usato come cifra delle unità, rimanendo ancora l'equivoco fra 232 e 2320 per esempio [N., pag.36]. In particolare Neugebauer annota [N., pag.44]: «*Non si può dare una risposta definitiva alla domanda quando sia stato introdotto il segno per indicare zero nella matematica babilonese. Siamo convinti che non esistesse, diciamo, prima del 1500 a.C.: e lo troviamo usato continuamente a partire dal 300 a.C.* ».

Nella matematica greca non è sentita l'esigenza di introdurre un simbolo per lo zero [Bo, pagg.69-70], poiché il sistema di numerazione usato non era posizionale ma s'avvaleva, almeno in quelli più avanzati come lo ionico (c.a. III sec. d.C.), di una corrispondenza biunivoca fra lettere e numeri. Così per esempio 2001 = 2000 + 1 = ͵βα e 3075 = 3000 + 70 + 5 = ͵γοε. Un altro motivo a giustificazione della non accettazione dello zero da parte dei Greci è racchiuso nell’opinione di Dantzig (che è condivisa da molti altri [2]) posta ad epigrafe del presente paragrafo.

Anche nelle civiltà non occidentali lo zero è causa di problemi di varia natura, per esempio nella matematica cinese [Bo, pag.241] il primo riscontro certo di un simbolo rotondo per lo zero avviene solo in un’opera del 1303: *Prezioso specchio* di Chu Shih-chieh, mentre nella matematica Indiana [Bo, pag.250] ciò accade in una iscrizione del 876.

Lo zero compare però molto tempo prima presso i Maya unitamente al sistema posizionale [N, O, Bo] (veniva usato un simbolo simile a quello di un occhio chiuso). Anche se in una prima fase nella matematica Maya [G, pag.1323] «*lo zero non è ancora necessario*» poiché la notazione è posizionale ma ogni particolare ordine ha il suo nome[3]. Quindi è solo successivamente con il raggiungimento di una notazione posizionale vera e propria che nasce il simbolo zero.

Proprio su quest'ultima osservazione pongo un'interessante questione. Come si concilia la precedente convinzione dello stretto legame fra il sistema posizionale e la nascita dello zero, con il fatto che nelle civiltà come quella romana in cui il sistema di numerazione non era posizionale, era di largo uso l'abaco? Dato che l'abaco, pur non costituendo una scrittura numerica, proprio per come era strutturato poteva (o doveva?) suggerire sia il ricorso alla notazione posizionale (con il fatto che “palline” presenti in righe diverse avevano un valore diverso), sia la necessità di utilizzare un simbolo per quelle righe su cui non era “segnata” alcuna pallina[4]. Credo che questo metta nel giusto risalto un'ovvia grossa difficoltà di natura psicologica ed epistemologica proprio nel legittimare con il pensiero ciò che segnalano i sensi visivi.

Lo zero considerato come cifra, specialmente nella notazione posizionale, indica una mancanza (finalmente!). Si innesta pertanto un problema di ordine psicologico che ostacola la creazione del simbolo o perlomeno la sua accettazione: l'*horror vacui* detta le regole anche nell'aritmetica. Quindi la sua definitiva accettazione, dapprima come cifra e poi come numero a tutti gli effetti, tenuto conto soprattutto degli innumerevoli problemi e di calcolo spicciolo (la divisione per zero) ed anche concettuali (elemento di posto zero), costituisce un passo molto importante nel raggiungimento dell'astrazione in Matematica, ed avviene perciò in maniera lenta e graduale[5].

Concludo questo paragrafo segnalando alcune difficoltà anche nella scelta di un simbolo per lo zero, così come nella decisione delle motivazioni che hanno potuto condurre alla scelta del tondino

---

(2) Per esempio Cipolla [C, pag.8] «*Anche nella numerazione greca c’è l’unicità della rappresentazione, ma è la regola additiva che vi presiede, e poiché lo zero è il numero indifferente della somma, esso è automaticamente escluso*»

(3) (per chiarimenti su questo fatto ed approfondimenti sui sistemi di numerazione il rimando è a [CFP, pagg.51-2])

(4) Per inciso quest’ultima osservazione conduce alla metafora della scatola vuota che Courant e Robbins [CR, pag.37] utilizzano per “definire” lo zero.

(5) Oltretutto la matematica romana non è andata mai oltre le applicazioni pratiche e tale atteggiamento non era certo quello che poteva stimolare le riflessioni richieste

vuoto; per approfondimenti il rimando è a [N, pagg.26-8, 43*;* Bo, pagg.233, 251, 290*;* G, pag.1326-7].

§3. <u>Lo zero da cifra a numero.</u>

> *«Proprio una rappresentazione concreta dei numeri (naturali) e delle operazioni fondamentali così rudimentale mostra come nella leggera estensione non ci sia apparentemente alcuna difficoltà, alcun mistero. Eppure intere culture, dotate talora di una matematica progredita e sofisticata, non sono state in grado di, o hanno esitato a, compierla; altrove la comparsa dello zero ha costituito l'intrusione di un vero e proprio sovversivo dalla Legge & ordine matematici...»*
>
> *Giulio Giorello, [G., pag.1319]*

Nel momento in cui dopo lunga e difficile lotta lo zero diviene cifra, comincia ad innestarsi un problema più importante e complicato, far divenire zero un numero a tutti gli effetti; farlo cioè rientrare nell'aritmetica ovvero nelle sue regole (per le quali diviene indispensabile), ma anche fuori da esse. Questi tentativi risultano però oltremodo ostici, basti pensare che ancora alla fine del ‘400 [Ba, pag.365] nel primo libro di Matematica a stampa pubblicato nel mondo (*Larte de labbacho)*, erano considerati numeri naturali solo quelli da 2 a 9. Quindi addirittura neanche il numero 1 era giudicato elemento di $\mathbb{N}$, in accordo con quanto stabilito già da Euclide parecchi secoli prima.

Vi è comunque da dire, sempre per testimoniare le grosse difficoltà di ogni ordine che dovettero superarsi perché lo zero potesse essere inserito nel novero dei numeri, che il punto di vista presentato ne *Larte de labbacho* sopravviveva nonostante quasi tre secoli prima Fibonacci nel suo celeberrimo *Liber* A*baci* (che è del 1202) avesse introdotto un nome (zephirum) ed un simbolo per lo zero, e che in seguito Alessandro di Villedieu nel *Carmen de Algorismo* avesse trattato lo zero come un numero a tutti gli effetti. Ed è altrettanto normale che queste “incongruenze” non fossero presenti solo in Italia[(6)]: [G, pag.1321]

E non bisogna dimenticare che in fondo Fibonacci aveva “copiato” dagli Indiani ai quali è dovuta non solo la creazione di un simbolo per lo zero, ma anche [G, pag.1326-7] «*lo slittamento da sem-*

---

(6) *«Ancora nel XV secolo, a più di duecento anni da quando Leonardo Pisano (Fibonacci) nel suo* ***Liber abaci*** *(1202) aveva annunziato che con le novem figure indorum e con hoc signum ¡, quod arabice chepirum appellatur si scriveva in linea di principio* ***qualsiasi*** *numero, un autore francese definiva lo zero une chiffre donnant umbre et encombre, un segno che produce confusione e difficoltà; altri, nel constatare che ogni aggiunzione di O dopo un numero appunto lo moltiplica per dieci, riscontrava con meraviglia che esso omnia ex nichilo creat, conservat atque gubernat»*

plice indicatore di un posto vuoto [...] a numero come gli altri, assoggettato a regole di calcolo che estendono in modo naturale le regole del calcolo».

Dovranno passare ancora molti secoli prima che lo zero possa essere considerato un numero a pieno titolo. Del resto esso non è positivo né negativo, non è pari né dispari, non è primo né composto, quindi non possiamo dar torto a chi ha avuto diffidenza a considerare lo zero anche solo un numero. Risulta interessante a tal proposito considerare il procedimento descritto in [E, pagg. 293-296] per la costruzione dei numeri negativi come estensione dei numeri naturali, considerati privi dello zero. Enriques riunisce due serie:

1, 2, 3, ..., *n*,... e 1', 2' 3', ..., *n'*,...

dopodiché li associa nella serie ordinata: ..., 4', 3', 2', 1', 1, 2, 3, 4, ... e pone 1'=1-1=0, (aveva già definito 0 come risultato dell'operazione *a-a*, ossia come rappresentante della classe nulla), 2'=0-1=-1, 3'=0-2=-2, e così via. In tal modo viene fornita anche una giustificazione del perché venga premesso il segno - ai numeri che chiamiamo negativi. Osserva d'altro canto che il fare in questo modo ha un corrispondente pratico nella numerazione degli anni avanti e dopo Cristo, provocando però una asimmetria. Nel senso che la differenza per esempio fra 4 d.C. e 4 a.C. risulta non di 8 anni come poteva aspettarsi ma di 7 anni, che gli anni bisestili prima di Cristo hanno cardinalità non multipla di 4: 1, 5, 9...

Come già notato in [Di] i problemi di rigore cominciano ad essere risolti in maniera pressoché definitiva nella seconda parte del 1800, ed in ciò grande importanza hanno proprio i problemi fondazionali relativi agli enti non certo più semplici ma con i quali da sempre il matematico ha avuto così tanta confidenza da non curarsi di chiarire alcuni punti, come è appunto accaduto per l'insieme dei numeri naturali.

Infine gli sviluppi dell'algebra astratta, con la creazione dei concetti di gruppo, anello e via dicendo hanno fatto sì che il concetto di zero fosse generalizzato a quello che forse più gli si confà, ossia elemento neutro. Infatti dal punto di vista per così dire "pratico", lo zero ha la peculiare caratteristica di essere "inerte" relativamente all'operazione di somma nell'insieme dei numeri naturali (quindi anche dei reali o complessi). Anzi abbiamo visto che è stata proprio questa sua neutralità a far sì che in tutti quei sistemi di numerazione nei quali la notazione additiva era preponderante, la sua esistenza fosse non negata ma semplicemente non considerata, trascurata.

Appare interessante segnalare anche lo zero come indicatore di un'idea astratta di nulla, per esempio in termologia la minima temperatura raggiungibile nel nostro pianeta (-273°) viene indicata come zero assoluto, mentre in informatica il minimo valore razionale (dell'ordine di 10^{-250} nei calcolatori più potenti) calcolabile dalla macchina viene indicato come zero di macchina. Si apre quindi l'idea di uno zero per così dire "pratico" contrapposto allo zero "teorico", zero è ciò che può essere considerato tale visto il grado di approssimazione desiderato conciliato con la precisione degli strumenti a disposizione. Parafrasando Aristotele abbiamo l'impossibilità di ottenere un infinitesimo in atto.

BIBLIOGRAFIA

[Ba] Bagni G.T., *Numeri e operazioni nel Medioevo: Larte de labbacho (L'aritmetica di Treviso,1478),* La Matematica e la sua didattica, n.4 1994, pagg.364-73.

[Bk] Barker S.F., *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna 1970

[Bo] Boyer C.B., *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano 1980.

[C] Cipolla M., *Nulla e zero*, Esercitazioni matematiche nuova serie, vol.X, Fasc.I, 1937, pagg.1-10.

[CFP] Capelo A.C., Ferrari M., Padovan G., *I sistemi di numerazione*, Progetto strategico del CNR, Università di Pavia, Quaderno n.7, 1990.

[CR] Courant R., Robbins H., *Che cos'è la matematica?*, Boringhieri, Torino 1971.

[Da] Dantzig T., *Il numero. Linguaggio della scienza.* La Nuova Italia, Firenze, 1965.

[Di] Di Stefano C., *Sull'evoluzione del concetto di rigore nella Storia delle Matematiche*) in due parti, La Matematica e la sua didattica, n.4, 1994, pagg. 374-82; n.1 pagg. 6-15, 1995).

[E] Enriques F., *I numeri reali* in *Questioni riguardanti le matematiche elementari,* Parte I Tomo I, Zanichelli, Bologna, 1923.

[G] Giorello G., *Voce* ***Zero*** *in Enciclopedia Einaudi*, pagg.1318-53, Torino 1979.

[N] Neugebauer O.- *Le Scienze esatte nell'antichità* - Feltrinelli, Milano 1974

[O] Ore O. - *Number theory and its history*- Dover, N.J. 1988.

[R] Russell B., *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton editori, Roma 1970.

ZERO ... SIA NATURALE !

PARTE II

LO ZERO IN ALCUNI AUTORI MATEMATICI

CARMELO DI STEFANO

I.T.G " E.MAJORANA" - GELA.

§0. <u>Introduzione.</u>

Dopo aver trattato dello zero in quanto simbolo e numero da un punto di vista storico-filosofico, sembra farsi luce il fatto che lo zero in quanto numero è un numero naturale se così lo si definisce, altrimenti non lo è. In questa seconda parte vedremo allora di indagare quali possono essere i motivi per definire o no zero come numero naturale e lo faremo prendendo in considerazione in maniera dettagliata alcune delle opere che maggiore importanza hanno avuto nella Storia delle Matematiche per la definitiva accettazione dello zero nell'ambito aritmetico.

§1. <u>Lo zero in Dedekind.</u>

Richard Dedekind pubblica nel 1888 il lavoro *Was sind und was sollen die Zahlen?*(7) , intendendo rispondere appunto alla domanda del titolo: *Che cosa sono e che cosa dovrebbero essere i numeri?* (resta inteso che "numeri" sono implicitamente i naturali). Per far ciò inizia a parlare in genere di *Sistemi di elementi*, in maniera "ingenua" come aggregato, collezione, totalità di "cose", cioè di oggetti del pensiero. Ad un certo punto afferma [D, pag.45]: «*è vantaggioso includere anche il caso speciale in cui un sistema S consiste di un* ***singolo*** *(uno ed uno solo) elemento* ***a*** *[...] D'altro canto, noi intendiamo qui per certe ragioni escludere del tutto il sistema vuoto che non contiene alcun elemento, sebbene in altre ricerche può essere utile immaginare un tale sistema*». Non viene chiarito durante tutto il lavoro né quali sono queste "*certe ragioni*" né in quali "*altre ricerche*" potrebbe essere utile considerare il sistema vuoto. Pertanto sembra evidente che Dedekind escluda a priori lo zero dall'insieme dei naturali.

Ed infatti nel seguito questa sua intenzione [D, pagg.67-8] viene legittimata dalla definizione, dapprima dei sistemi "semplicemente infiniti" in cui 1 è l'elemento base(8) e poi da quella dei natu-

---

(7) Ho consultato tale testo in una traduzione inglese, pertanto nel seguito le citazioni proposte sono mie traduzioni dall'inglese

(8) Con termine moderno lo chiameremo l'elemento iniziale, il minimo dell'insieme

rali, per i quali trascura il carattere degli elementi a vantaggio soltanto della loro posizione. Rinvio al testo citato per ogni approfondimento sui termini che uso ma la comprensione del cui significato ritengo o ben nota al lettore o comunque non di importanza fondamentale per le mie indagini.

Il non voler considerare zero un numero naturale Dedekind lo aveva già fatto capire, anche se con un passaggio veloce, nel suo *Stetigkeit und irrationale Zahlen* che è del 1872 ed è per inciso il lavoro in cui definisce le sue famose "sezioni". Infatti in quello studio affermava [D, pag.35] «*In accordo con lo scopo di questa memoria restringerò le mie considerazioni alla serie dei così detti numeri naturali. In modo che la graduale estensione del concetto di numero, la* ***creazione dello zero****, dei numeri negativi, frazionari, irrazionali e complessi sarà ottenuta per graduale estensione dei concetti precedenti*». (l'evidenziazione è mia). Quindi lo zero viene considerato una estensione del concetto di numero naturale allo stesso modo dei relativi, degli irrazionali o dei complessi (se vogliamo in tal modo lo studioso tedesco aderisce in parte a quello che è stato il decorso storico che ho già segnalato).

Quali possono essere state le motivazioni del rifiuto o della non necessità a considerare zero come numero naturale? A mio parere una prima ragione dipende dal fatto che uno degli intenti fondamentali di *Was sind und was sollen die Zahlen?* era quello di creare un isomorfismo fra ogni sistema "semplicemente infinito" ed i naturali in modo che [D, pag.95] «*ogni teorema riguardante numeri, relativo cioè agli elementi n del sistema semplicemente infinito* $\mathbf{N}$ *[...] possegga validità del tutto generale per ogni altro sistema semplicemente infinito* Ω *relativamente ad una trasformazione* θ *e ad i suoi elementi* ν*, e che il passaggio da* $\mathbf{N}$ *a* Ω *[...] venga effettuato dalla trasformazione* ψ *[...] che cambia ogni elemento n di* $\mathbf{N}$ *in un elemento* ν *di* Ω*, cioè in* $\psi(n)$*. Questo elemento* ν *può chiamarsi n-esimo elemento di* Ω *e parimenti il numero n è esso stesso l'n-esimo numero della serie dei numeri* $\mathbf{N}$». Vedo in ciò quindi un imbarazzo, anche intellettuale, di considerare un elemento di posto zero; non dimentichiamo che Dedekind definisce i naturali a partire dalle loro proprietà ordinali, piuttosto che da quelle cardinali.

Credo che vi sia anche un altro motivo di ordine per così dire pratico. Nella definizione che Dedekind fornisce non si sente la necessità di introdurre un elemento neutro per la somma in $\mathbf{N}$. Infatti egli definisce la somma (+) mediante le regole[9] [D, pag.97]:

II. $m+1 = m'$ (con m' viene inteso il successivo di m)

III. $m+n' = (m+n)'$.

---

[9] La regola I qui omessa, definisce solo la legge di trasformazione ψ.

In altre parole è proprio la nozione di *"Successivo"* che caratterizza $\mathbf{N}$ come sistema semplicemente infinito e nel contempo lo differenzia dagli altri. Del resto il concetto di successivo è collegato, in maniera più o meno esplicita, all'operazione concreta di aggiungere 1 (che nella sua assiomatica Dedekind definisce come ente primitivo) diventa perciò *naturale* considerare proprio 1 come elemento minimo di $\mathbf{N}$, piuttosto che 0. Ed ancora, in nessuno dei teoremi stabiliti in $\mathbf{N}(+)$ si sente la necessità di introdurre lo zero (legge commutativa, associativa, di semplificazione[(10)]) come elemento neutro rispetto a (+). Quando invece viene definita l'operazione $(\cdot)$ in $\mathbf{N}$ con le leggi [D, pag.101]:

$$\textit{II.}\ m\cdot 1 = m$$

$$\textit{III.}\ m\cdot n' = m\cdot n + m$$

è 1 ad essere usato come elemento neutro[(11)].

Ed ancora nella definizione di potenza ad esponente naturale [D, pag.104]:

$$\textit{II.}\ a^1 = a$$

$$\textit{III.}\ a^{n'} = a\cdot a^n = a^n\cdot a.$$

Qui si evita anche l'ulteriore imbarazzo di considerare la potenza ad esponente nullo.

Un'altra motivazione che può aver convinto Dedekind a non considerare lo zero è presente in questa sua affermazione (contenuta in *Stetigkeit und irrationale Zahlen*) [D, pag.4]: «*Considero l'aritmetica nella sua interezza come una conseguenza necessaria o almeno naturale del più semplice atto aritmetico, quello del contare*». Ritorna quindi il problema già dibattuto: che senso ha contare il vuoto?

Nel prossimo paragrafo considererò il punto di vista di un altro matematico le cui opere si sono rivelate fondamentali per una corretta fondazione dei numeri naturali: Peano.

§2. Il *Formulario* di Peano.

> *«La stessa oscillazione di Peano e della sua scuola nel formulare gli assiomi per i naturali* ***senza*** *lo zero o* ***con*** *lo zero appare dunque nella sua vera luce. Gli assiomi peaniani non assegnano ai numeri 0, 1, 2, 3, ecc. alcun significato, specificano soltanto che essi devono godere di certe proprietà enunciate negli assiomi.»*
>
> *Giorello G., [G, pag.1344]*

---

(10) $m>a \Leftrightarrow m+n > a+n;\ m+n=a+n \Leftrightarrow m=a$

(11) La moltiplicazione a sinistra per 1 è stabilita come Teorema [D, pag.102]: $1\cdot n = n$

Giuseppe Peano, il torinese che ebbe il merito di iniziare la sistemazione del sistema dei numeri naturali, continuata in seguito da Skolem, Gödel ed altri, ha mantenuto la sua assiomatica inalterata nella sua struttura a partire dalla prima enunciazione nel 1889 in *Arithmetices principia nova methodo exposita* e poi nelle diverse edizioni del suo *Formulario Mathematico* (cinque edizioni dal 1894 al 1908); l’unica variazione degna di nota è stata appunto la questione dello zero. Infatti negli *Arithmetices* è 1 ad essere considerato il “primo” naturale, invece nella seconda parte del volume 2 del *Formulaire*, pubblicata in francese nel 1898 [K, pag.117], così come nell’ultima edizione (quella del 1908 a cui mi riferirò) viene mutata questa idea, sostituendo lo zero con il numero uno. Ricordo che quest'ultima edizione viene scritta nel linguaggio da Egli stesso inventato: il *latino sine flexione*, lo citerò in originale poiché credo che ciò non nuoccia in alcun modo alla comprensione dell'articolo, anzi ritengo possa giovare a mantenere quell’aura di “fedele” riporto delle citazioni a cui tutto il mio lavoro intende sempre obbedire (per una descrizione dettagliata e commentata degli assiomi rimando anche a [BM, pagg. 299-301]).

Anche Peano parte da lontano (ovvero dalle classi), prima di introdurre la nozione di numero, pertanto a proposito dello zero dice: [Pe, pag.12] «$\wedge$, *lege classe nullo, indica classe de objecto commune ad omni classe a. Responde ad 0 de Arithmetica.*»

Fatto ciò passa alla definizione degli “enti primitivi” [Pe, pag.21]: «*Ergo nos sume tres idea* $\mathbf{N}_0$, ***0***, **+** *ut idea primitivo, per que nos defini omni symbolo de Arithmetica. Nos determina valore de symbolo non definito* $\mathbf{N}_0$, ***0***, **+** *per systema de propositio primitivo sequente* (Ometto di riportare la simbologia, presento invece le descrizioni a parole).

·0 $\mathbf{N}_0$ *es classe, vel numero es nomen commune.*

·1 *Zero es numero.*

·2 *Si* ***a*** *es numero, tunc suo successivo es numero.*

·3 $\mathbf{N}_0$ *es classe minimo, que satisfac ad conditione ·0·1·2 id es, si* ***s*** *es classe, que contine* ***0*** *et si* ***a*** *pertine ad classe* ***s***, *seque pro omni valore che* ***a***, *que et* ***a+*** *pertine ad* ***s***; *tunc omni numero es* ***s***. *Ce propositione es dicto principio de inductione, et nos indica illo per abbreviatione* ***Induct.***

·4 *Duo numero, que habe successivo æquale, es æquale inter se.*

·5 ***0*** *non seque nullo numero.*

È interessante notare l’uso dello zero anche come numero di posizione nella enunciazione degli assiomi: Peano non ha più il timore di Dedekind di considerare il concetto di elemento di posto zero.

Per gli scopi del presente lavoro risulta interessante cercare di capire i motivi di questa mutata presa di posizione riguardo allo zero. In una prima fase il punto di vista di Peano appare molto simile a quello di Dedekind ed una differenza fondamentale fra i due lavori consiste forse solo nella diversa accettazione dell'*elemento minimo* di **N**. Alcuni Autori [BM, pag. 301] credono che ciò sia dipeso quasi esclusivamente dalla lettura delle opere di Gottlob Frege, il quale nella stesura di *Die Grundlagen der Arithmetik* del 1884, aveva appunto sostituito lo zero all'uno come punto di partenza delle catene di Dedekind [BM, pag.339] e lo aveva definito come la classe di tutte le classi vuote [BM, pag.354]. Frege aveva preso coscienza del fatto che anche la mancanza doveva essere "registrata". Affinché un sistema di oggetti esistenti possa essere ben fondato anche il non esistente deve essere definito, anzi è a partire dal nulla che il tutto viene a formarsi.

Per me però rimane ancora un problema logico fondamentale in questo punto di vista: se non ho definito il concetto di "uno" non sarò in grado di aggiungere alcunché, in quanto è vero che la relazione di successivo è una pura legge assiomatica, ma è parimenti vero che la sua appartenenza al sistema assiomatico è "motivata" dalla corrispondente operazione "concreta" di aggiungere uno. Era forse questo che aveva condotto Peano alle sue stesure precedenti a quella del 1898? Forse sì, ma allora perché il seguente mutamento? L'idea suggerita in [BM] non credo possa essere avvalorata più di tanto dato che dai *Grundlagen* al *Formulaire* del 1898 sono passati 14 anni. Vi è stato piuttosto, a mio parere, il riconoscimento dell'importanza dello zero che ha in qualche modo forzato la mano al torinese. Quale poteva essere l'idea finale? Forse quella di introdurre due enti primitivi, ma ciò andava contro il principio di economia delle leggi assiomatiche. O piuttosto quella di definire come ente primitivo l'elemento neutro, senza distinguere fra zero ed uno e lasciare alla simpatia del lettore, o ad al contesto ed alle necessità del caso la scelta. Però in tal modo lo zero viene a perdere la sua intrinseca natura di "testimone del nulla". Vi è da notare che neanche nella dettagliata e corposa biografia di Peano curata da Hubert Kennedy [K] vi è spiegazione del motivo di questa sostituzione. Un tentativo di spiegazione lo abbiamo trovato solo in Enriques, suo contemporaneo, che in [E, nota (1) a pag. 268] si limita a scrivere *«in esposizioni successive, Peano ha cambiato qui "lo 1" con "lo 0", per motivi di semplicità algoritmica».*

Nel prossimo paragrafo concluderò i miei commenti di opere classiche con i lavori di Bertrand Russell.

§3. Bertrand Russell ed i principi.

Un'altra personalità preminente nella Storia delle Matematiche relativamente a problemi fondazionali è stato senza dubbio Bertrand Russell. Di questo autore prenderò in considerazione due testi: *Introduzione alla filosofia della matematica* e *I principi della Matematica*. Comincerò a

Introduzione alla filosofia della matematica e *I principi della Matematica*. Comincerò a considerare il primo che è del 1918, successivo quindi sia ai *Principia Mathematica*(12) che al secondo testo da me considerato. Questa è sicuramente un'opera divulgativa proprio delle idee espresse nei *Principia*, e nello stesso tempo appare anche come l'ultimo lavoro di Russell sulla matematica.

Il filosofo inglese proprio nelle prime pagine dichiara: [R2, pag.18] «*Per una persona di cultura media, oggi, il punto ovvio di partenza della matematica sarà la successione dei numeri interi , 1,2,3,4,..., etc. È probabile che solo ad una persona che conosca un po' di matematica verrebbe in mente di cominciare con lo 0 anziché 1; presupponiamo comunque questo grado di cultura e prendiamo come nostro punto di partenza la serie 0,1,2,3,...,n,n+1,... questa sarà la serie che chiameremo la serie dei numeri naturali.*»

Non è spiegato perché la conoscenza di un po' di matematica dovrebbe indurci a partire da zero. Comunque sembra appoggiata la tesi che le popolazioni primitive non accettassero l'idea di zero come numero naturale.

Di seguito, pur criticando l'impostazione di Peano relativa al fatto che la nozione di numero venga considerato ente primitivo, così come quelle di zero e successore(13) , non mette comunque mai in dubbio che zero sia un numero naturale, anzi definisce $\mathbf{N}$ come [R2, pag.40] «*la posterità di 0 rispetto alla relazione immediato predecessore*». Ed arriva poi a definire 0 come la classe il cui solo membro è la classe nulla.

Ne *I principi della Matematica*, opera ancora divulgativa (specie se considerata in rapporto ai *Principia*) ma più “specialistica” della precedente si lascia andare a qualche tecnicismo in più, precisamente dice: [R1, pag.43] «*Una nuova caratteristica del calcolo delle classi è la classe nulla, ovvero la classe che non ha termini. Questa può definirsi anche come la classe dei termini che appartengono ad ogni classe, come la classe che non esiste*(14)*, come la classe che è contenuta in ogni classe, come la classe λ tale che la funzione proposizionale “x è in λ" è falsa per tutti i valori di x, o come la classe delle x che soddisfano ogni funzione proposizionale fx che è falsa per tutti i valori di x.*»

In breve posso dire che il concetto di zero in Russell è legato strettamente a quello di nulla filosofico ed anche se questo punto di vista fa sorgere qualche problema tecnico, esso seppure risolto rimane in ogni caso sempre in secondo piano. Si rimanda in particolare a quanto affermato in: [R1, pag.96-98].

---

(12) Forse l’opera più citata e meno letta nella Storia delle Matematiche, fu scritta in collaborazione con Whitehead dal 1910 al 1913

(13) Preferisce infatti l'impostazione di Frege che invece ne fornisce una definizione: [R2, pag.36] «*Il numero è il numero di una classe*»

(14) Aveva definito in precedenza [R2, pag.41] «*una classe a esiste quando e solo quando è vera ogni proposizione a condizione che “x è un a” la implichi sempre, qualsiasi valore si dia ad x*»

Sono altresì interessanti le sue considerazioni sugli indefinibili *0, intero, finito e successore di* in Peano [R1, pag.148-9], così come sulle proposizioni primitive, la prima delle quali recita che *0 è un numero*. È riportata la nota di Peano a proposito del fatto che se nella sua assiomatica si sostituisce *numero* e *0*, rispettivamente con *numero diverso da zero* ed 1, si ottiene un sistema che soddisfa le stesse proposizioni primitive stabilite. Ma obietta: «*questa affermazione mi sembra che presenti un difetto di correttezza logica [...] Come si può [...] distinguere il sistema che comincia con 1 da quello che comincia con 0? È possibile dare due diverse risposte a questo problema. Possiamo dire che sia 0 che 1 sono idee primitive, o che almeno 0 lo è certamente, e che pertanto 0 ed 1 sono distinti intrinsecamente, come si distinguono il giallo ed il blu*»

Nel prossimo e conclusivo paragrafo tratterò i punti di vista di alcuni testi matematici che se non proprio dei classici sono certamente degli ottimi trattati, insieme con alcuni lavori che hanno espressamente avuto per tema lo zero.

§4. <u>Pro e contro lo zero numero naturale.</u>

Comincio con Michele Cipolla che negli anni ‘30 fu designato a scrivere la voce *zero* per l’*Enciclopedia Italiana*. Non avendo potuto esprimere a pieno il suo parere in un’opera che non poteva né doveva essere troppo “tecnica”, scrive una nota [C] in cui precisa le sue posizioni. Fra le altre cose afferma: [C, pag.4-5] «*mi preme [...] far rilevare che non occorre definire lo zero per fondare l’Aritmetica. [...] Può farsi un’Aritmetica senza lo zero? Può farsi; anzi può farsi un’Aritmetica senza numeri! Se riduciamo infatti la concezione di numero naturale ai suoi primi elementi, non troviamo altro che classi coordinabili di oggetti; l’Aritmetica nel suo stadio più basso non è che una serie di operazioni semplici fra classi di oggetti che possono coordinarsi ossia mettersi in corrispondenza* ***uno ad uno****; è l’Aritmetica dei popoli primitivi.*»

La mia interpretazione è che Cipolla si preoccupi di un problema più grosso, cioè di stabilire il "significato" dei numeri e così, in completo accordo con tutti i logici italiani della scuola di Peano, fa presente appunto che non per forza i numeri debbano avere dei corrispondenti concreti. Il tutto è ben testimoniato in un lavoro di vasto respiro sui numeri di qualche decennio precedente a quello di Cipolla, nel quale [N, pag.347] è riportato, fra gli altri, un sistema di postulati proposto da Alessandro Padoa, nel quale lo 0 è definito per mezzo delle altre due nozioni, $\mathbf{N_0}$ e + e i postulati sono perciò ridotti a quattro. Nel terzo di essi in particolare, si afferma l'esistenza di almeno un numero che non è successivo di altri, ovvero l’idea appoggiata da Cipolla(15).

(15) Chi volesse sentire la “viva voce” di Padoa potrebbe consultare [Pa]

In seguito [N, pag.348] viene presentato quest'altro sistema di postulati, enunciato da Mario Pieri (si noti la mancanza totale dei simboli)

- **Esiste almeno un numero.**
- **Il successivo di un numero è un numero.**
- **Due numeri, nessuno dei quali sia successivo di un numero, sono sempre uguali fra loro.**
- **In qualsivoglia classe di numeri, non illusoria, esiste almeno un numero che non è successivo di alcun numero della classe.**

Anche Pieri quindi sembra essere cosciente della **sostituibilità** dello zero, ma tornando alla "concretezza" di 0 Egli afferma che **0 è un naturale.**

Considerando qualche lavoro più vicino temporalmente ai giorni nostri ci imbattiamo nel primo testo italiano universitario di algebra [L]. In esso [L, pag.34] vengono riportati gli assiomi di Peano nella forma

(P1) 1 è un numero naturale

e viene semplicemente annotato, senza approfondimenti che «*molti autori considerano lo zero un naturale, e pongono negli assiomi 0 in luogo di 1*». In qualche modo l'autore giustifica la sua adesione a questa teoria facendo vedere come dagli assiomi di Peano si deduca tutta l'aritmetica, a partire dall'introduzione dell'operazione di addizione e utilizzando i concetti di "uno" e di "successivo immediato" . Rimaniamo quindi nell'ordine di idee che, seppure entrambi siano concetti primitivi, hanno una stretta correlazione, sicuramente più di quella che potrebbe esserci fra i concetti di "zero" e "successivo".

Veniamo adesso ad un altro grande matematico i cui molteplici interessi, soprattutto logici possono certamente aiutarci nelle nostre questioni: Federigo Enriques. Precisamente consideriamo l'articolo sui numeri reali da lui scritto nelle *Questioni riguardanti la matematica elementare* da lui stesso curata [E]. Egli parte chiamando numeri naturali [E, pag. 231] 1, 2, 3, ..., trascura quindi lo zero, continuando con questa impostazione anche dopo la nota sugli assiomi di Peano che abbiamo già citato. La necessità dello zero nei numeri naturali nasce quando egli definisce la sottrazione. E lo fa per [E, pag.275] «*togliere il caso d'eccezione corrispondente all'uguaglianza dei due numeri* [nella sottrazione a-b]», quindi definisce il numero 0 come [E, ib] «*numero cardinale della classe nulla*» e mediante le espressioni:

$a+0=a$, $0=a-a$, con a numero naturale qualsiasi.

A questo punto Egli nota che [E, ib.] «*qualora, invece che a numeri cardinali, ci si riferisca a numeri ordinali, la sottrazione a-a riesce impossibile nella serie 1, 2, 3, ..., a, ...*». Da questo punto in poi lo zero viene “assunto” quale numero naturale, con i pro ed i contro già da Enriques segnalati e da noi riportati in precedenza.

Per finire riprendo un testo già citato [CR], in esso lo zero non è trattato come un numero naturale, ma piuttosto come una leggera estensione del dominio dei numeri interi positivi, lo zero come la *scatola vuota*. E si ripresenta il solito problema, se 0 non è naturale come usarlo nella sua qualità di elemento neutro per l'addizione? Inoltre perché 0 non deve essere considerato un numero naturale se invece le altre nove cifre hanno dei rappresentanti che sono tutti naturali?

D'altro canto il principio di induzione potrebbe presentare qualche problema “tecnico” supponendo lo zero come primo numero (vi è già una contraddizione di termini, peraltro già segnalata, in questa frase). Ma ciò potrebbe essere superato dicendo che la proprietà è vera se è vera non per 0 né per 1, quanto per il primo valore per cui essa ha significato. P.e. che la somma dei primi n interi sia n(n+1)/2 dimostrata per induzione non ha senso per n=0, né per n=1; in [CR] viene appunto considerato un principio di induzione generalizzato, ragionando quindi non più su A_1 o A_0, quanto piuttosto su un certo A_s.

§5. Conclusione

Ma infine “conviene” definire lo zero come numero naturale o no? Parafrasando il Pirandello di *Così è se vi pare*, posso dire di aver mostrato che se supponiamo che lo sia allora molte cose “funzionano” ed altrettanti dubbi nascono, del resto anche se non lo consideriamo tale la situazione si presenta del tutto identica. Ma allora il lettore si chiederà: tutte le “chiacchiere” che mi hanno propinato, a che fine? Ovviamente difendo la mia causa ricordando innanzitutto di aver parlato per tempo di “simpatie”. Inoltre il lavoro non ha mai avuto la pretesa di voler essere una esposizione del punto di vista definitivo, quanto piuttosto una descrizione dettagliata, debitamente criticata ed opportunamente inquadrata storicamente delle prese di posizione più importanti. Ho altresì sollevato diverse interessanti questioni alle quali ho cercato di dare spesso risposta (forse parziale e sicuramente soggettiva).

Concludo con un ultimo invito meno "serio" alla riflessione: se i numeri naturali sono veramente “naturali” il detto “ricominciare da zero” che da tempo immemorabile è entrato a far parte del dire comune, rappresenta o no una posizione a vantaggio dello zero numero naturale?

BIBLIOGRAFIA

[BM] Bozzi S., Mangione C., *Storia della logica (Da Boole ai giorni nostri)*, Garzanti, Milano 1993.

[C] Cipolla M., *Nulla e zero*, Esercitazioni matematiche nuova serie, vol.X, Fasc.I, 1937, pagg.1-10.

[CR] Courant R., Robbins H., *Che cos'è la matematica?, Boringhieri, Torino 1971.*

[D] Dedekind R.- *Essays on the theory of numbers (I. Continuity and irrational numbers*; *II. The nature and meaning of numbers)*, Dover New York, 1963.

[E] Enriques F., *I numeri reali* in *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Parte I Tomo I, Zanichelli, Bologna, 1923.

[G] Giorello G., *Voce* ***Zero*** *in Enciclopedia Einaudi*, pagg.1318-53, Torino 1979.

[K] Kennedy H.C., *Peano, storia di un matematico*, Boringhieri, Torino 1983.

[L] Lombardo Radice L., *Istituzioni di algebra astratta*, Feltrinelli, Milano 1965.

[N] Natucci A., *Il concetto di numero e le sue estensioni*, Fratelli Bocca, Torino 1923.

[Pa] Padoa A., voce *Logica* in *Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi vol.I, parte 1*, Hoepli, Milano Ristampa anastatica 1979

[Pe] Peano G., *Formulario Mathematico*, Fratelli Bocca (indicato sul frontespizio come Fratres Bocca) Editore, Torino 1908.

[R1] Russell B., *I principi della Matematica*, Newton Compton, Roma 1989.

[R2] Russell B., *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton editori, Roma 1970.