Definizione di “Teoria matematica”

Uso le “parentesi asteriscate” “(*” e “*)” per i commenti, così che se si vuole snellire le definizioni basta semplicemente eliminarle.

Non sono un “esperto di logica”, ma mi cimento comunque nell’impresa.
Mi pare di concordare soprattutto con giannilor, comunque cerco di approfondire.

Un concetto primitivo
è un concetto (un ente) di cui si assume non saper altro che ciò di cui predicano gli assiomi (o i postulati) e ciò che segue dalla logica
(* Sono esempio di concetti primitivi “punto”, “retta”, “piano”, “movimento rigido” della geometria euclidea dello spazio (o del piano). *)

Un concetto intuitivo
è un concetto che si suppone noto a priori, senza che venga definito in modo rigoroso.
(* Un esempio importante di concetto intuitivo è il concetto di insieme. Dove e quando è possibile alle superiori si evita (o si dovrebbe evitare) di ricorrere a concetti intuitivi. *)

Una definizione di un insieme di enti
è una proprietà che è verificata solo dagli elementi di quell’insieme (come dire: la caratteristica dell’insieme).
Comunemente si danno definizioni “soprattutto” di insiemi di un solo elemento e con proposizioni (principali) rette dal verbo “essere”.
(* Le definizioni in matematica devono essere “buone definizioni”, devono cioè essere date in modo “univoco”, tale cioè da non dare luogo a concetti diversi con lo stesso “nome”. Per esempio se dicessi: associo ad ogni oggetto l’iniziale del proprio nome” dovrei sicuramente specificare o avere sottointeso la lingua, ma non sarebbe ancora sufficiente, perché per lo stesso ente potrei avere nomi diversi con differente iniziale (motorino, ciclomotore, scooter, …). *)

Un assioma
è una proposizione che si assume vera a priori.
(* Non interessa che sia di fatto vera: infatti vi sono, per esempio, 3 geometrie diverse con 3assiomi che si escludono a vicenda. Ovviamente se è vero uno dei 3 sono necessariamente falsi gli altri due. *)

Un postulato
è un assioma che si “postula” vero, cioè che si crede che sia vero in pratica.
(* A mio giudizio oggi introdurre dei postulati è più un fatto di “metamatematica” che di matematica, dal momento che in matematica sono stati sostituiti del tutto dagli assiomi. *)
(* Io personalmente non ho troppi problemi a cercare quale sia la geometria “vera”, ma certo non ne discuterei con chi non si apre a visioni di metamatematica. *)

Un sistema di assiomi
è un insieme di assiomi. Se ne ricerca soprattutto la coerenza, la completezza e la “indipendenza”. La prima proprietà significa l’impossibilità di ricavare dal sistema una proposizione che sia vera e che sia falsa; la seconda significa che di ogni proposizione si può ricavare il valore di verità (vero o

falso); la terza è di gran lunga la meno importante e significa che nessuno degli assiomi può essere dimostrato supponendo veri tutti gli altri.
(* Hilbert avviò un programma per trovare un sistema di assiomi per la geometria euclidea che avesse tutte e tre le caratteristiche, ma dovete arrendersi quando Göedel dimostrò sia che non è possibile dimostrare (dall'interno, cioè senza confrontare la teoria con altre che si suppongono vere) la coerenza di nessun sistema abbastanza completo da potervi operare l'aritmetica (in pratica "tutti" quelli utili), sia che non esiste un sistema di assiomi completo, cioè che in ogni sistema finito di assiomi esistono proposizioni indecidibili, tali cioè da poter esser assunte vere o false (ma una sola delle possibilità) senza generare contraddizione. *)

Un teorema, in un sistema di assiomi,
è una proposizione che si dimostra essere (necessariamente) vera come conseguenza logica degli assiomi del sistema.
(* L'importanza (e l'utilizzo) dei sistemi di assiomi sta nel fatto che "SE" riconosco che una situazione verifica gli assiomi di un sistema di assiomi, allora verifica necessariamente tutti i teoremi ivi dimostrabili. Questo implica che non ha quasi significato che i singoli assiomi siano "veri" di per sé, perché possono esserlo in certe situazioni e non esserlo in altre, e l'unica conseguenza sta nel fatto che nel primo caso la realtà può essere interpretata da quell'insieme di assiomi, mentre nel secondo caso no. *)

una congettura (**o una ipotesi**, non ho abbastanza esperienza in merito per riuscire a fare distinzioni attendibili), **in un sistema di assiomi**,
è una proposizione che non si è dimostrata essere (necessariamente) vera come conseguenza logica degli assiomi del sistema, anche se comunemente ha avuto verifiche positive in molti esempi e anche dimostrazioni formali in un insieme di valori "significativo".
(* Oserei quasi dire che «ha avuto verifiche sperimentali che nelle altre scienze non lascerebbero dubbi». *)

L'insieme dei concetti intuitivi, dei concetti primitivi, del sistema di assiomi (o degli assiomi), delle definizioni, dei teoremi e, perché no, delle congetture costituisce una teoria matematica.
(* Personalmente non mi pare che abbia importanza, ai fini di quanto sopra, che una teoria matematica sia "utile", anche se non mi stupisce che per molti "tecnici" sia la caratteristica "principale": tale caratteristica varia con il tempo, ed il tempo, diversamente dalla Fisica, non compare in ciò che è matematica, se non nel semplice svolgersi del "filo logico delle argomentazioni".
Per esempio: credo che le geometrie non euclidee una volta fossero solo "semplici curiosità matematiche", finché non se ne è trovata l'interessantissima applicazione alla cosmologia; e se il fatto non fosse vero (so di essere molto ignorante), ciononostante la sua plausibilità funziona ugualmente bene come esempio. *)