Dimostrazione che la radice di 2 è irrazionale e generalizzazioni

Supponiamo (per assurdo) che esistano due naturali n,m tali che m/n= rad(2), e quindi tali che m^2/n^2= rad(2), cioè tali che $m^2=2\cdot n^2$.
L'assurdo segue dall'osservazione che m^2 e n^2 hanno un numero pari di fattori (anche uguali), per cui si ha l'uguaglianza fra due numeri la cui scomposizione ha una volta un numero pari di fattori ed una volta ne ha un numero dispari.

Ovviamente questa dimostrazione vale tal quale (con una minima variazione) per la radice pari (quadrata, quarta, sesta, ...) di qualunque numero naturale scomponibile in un numero dispari di fattori primi, per esempio per la radice sedicesima di 70 ($2\cdot5\cdot7$).

Con un'altra “piccola” variazione si può estendere ancora la dimostrazione: dato un qualunque fattore di un numero, si può guardare solo la parità di quel fattore.
Per esempio se nella scomposizione del numero a di cui si vuol calcolare la radice il fattore primo p compare un numero dispari di volte, e si vuole calcolare la radice b-esima di a, con b numero naturale pari, dalla relazione $m^b=a\cdot n^b$ segue che il fattore p compare un numero pari di volte sia in m^b che in n^b, e quindi un numero dispari di volte in $a\cdot n^b$, da cui l'assurdo.
Da quanto sopra segue che
«La radice pari di qualunque numero naturale la cui scomposizione in fattori primi ha almeno un fattore primo con esponente dispari, è irrazionale».
Questo "non può" essere generalizzato ulteriormente, nel senso che vale il se e sole se ("sse"):
«La radice pari di un qualunque numero naturale è irrazionale sse la sua scomposizione in fattori primi ha almeno un fattore primo con esponente dispari».

Una generalizzazione è possibile invece lavorando sull'indice i della radice, con una dimostrazione che, al posto della parità, usi il resto della divisione modulo i:

«**La radice di indice i di un qualunque numero naturale è irrazionale sse la sua scomposizione in fattori primi ha almeno un fattore primo con l'esponente che non è un multiplo intero di i**»,

o, equivalentemente,

«La radice di indice i di un qualunque numero naturale è razionale sse tutti gli esponenti dei fattori primi della sua scomposizione sono multipli interi di i».