Posta qui il numero più grande.

Questo era il titolo di un gioco che proposi anni fa sul sito di matematica ricreativa “Base cinque”, in cui si doveva provare a definire il numero più grande possibile, ricorrendo a tutte le possibilità matematiche di cui si dispone.
Anche il resto di questo file risale a “quel tempo”.

Notazioni

Nel definire il mio “numero più grande” introdurrò concetti che credo risulteranno non intuitivi “al primo colpo”, per cui ritengo utile aggiungerci alcuni commenti e spiegazioni.
Per non appesantire le definizioni, però, ritengo utile introdurre una notazione che permetta di riconoscerli facilmente ed eventualmente di eliminarli:
con il simbolo “(*” e “*)” rappresento parentesi che racchiudono un “commento”, così che il tutto sarà una espressione del tipo “(* commento *)”,
analogamente per spiegazioni “di secondo livello”: “(** commento **)” e “di terzo livello”: “(*** commento ***)”.
Userò quelle di primo livello per esempi esplicativi, quelle di secondo per le motivazioni e quelle di terzo per gli “approfondimenti”.

Nel proseguo con il termine “**PDNG**”, indicherò “il Procedimento di Definizione del Numero più Grande”, cioè il lavoro che sto facendo per definire il numero che posterò per partecipare alla gara “posta qui il numero più grande”.
(*** Questa è una definizione autoreferenziale, ma non credo che dia luogo a paradossi. Comunque penso che sia preferibile utilizzare questa piuttosto che un rigiro di parole molto più contorto. ***)

Definizioni introduttive (* Come dire: “Livello 0” ***)**

Inizio introducendo la successione dei numeri naturali, che chiamo “N(n)”.
(* Per esempio N(5)=5. *)

In N ho l’operazione unaria “successivo” e in N-{0} ho quella “precedente”; indico quest’ultima con “p”
(* p(n)=n-1, per esempio p(13)=12)

A questo punto considero la successione di “livello 0” del PDNG che definisco semplicemente come **s0(n)=N(n)**.
(** Sembra una cosa inutile, ma nel seguito del PDNG introdurrò altre successioni come “s1(n) e s2(n), continuando ad utilizzare N(n), e mi pare più “elegante” operare come ho fatto. **)

1° livello di PDNG

Livello 0 (** nel 1° livello di PDNG **)

Considero l’operazione di “livello 0” (in questo livello di PDNG) di un numero n, che chiamo “op1.0” (*che significa “operazione 1.0”*), che consiste semplicemente nell’associare, ad ogni elemento di s0, il successivo elemento in s0, che indico con “op1.0(n)”).
(* Di fatto questa è semplicemente l’operazione “successivo di un numero naturale”. *)
(** Tale operazione è una operazione unaria, cioè con un solo argomento, come lo è l’operazione “estrazione di radice quadrata”. **)

Livello 1 (** nel 1° livello di PDNG **)

Poi definisco l’operazione di “livello 1” fra due numeri “a” e “b”:
“(a op1.1 b)” definita in modo tale che
(a op1.1 0) = a, e che
(a op1.1 b) = ((op1.0(a)) op1.1 p(b)) .
(**(a op1.1 b) lo ho definito uguale a ((successivo di a in s0) op1.1 (precedente di b in N)), a meno che b=0, nel qual caso è semplicemente “a”. **)
(* op1.1 è semplicemente la somma fra numeri naturali. *)
(* (5 op1.1 3) = (6 op1.1 2) =(7 op1.1 1) =(8 op1.1 0) = 8 . *)

Livello 2 (** nel 1° livello di PDNG **)

Poi definisco l’operazione di “livello 2” fra due numeri “a” e “b”:
“(a op1.2 b)” definita in modo tale che
(a op1.2 0) = 0, e che
(a op1.2 b) = (a op1.1 (a op1.2 p(b))) .
(* op1.2 è semplicemente il prodotto fra numeri naturali. *)
(* (5 · 3) = (5 + (5 · 2)) = (5 + (5 + (5 · 1))) = (5 + (5 + (5 + (5 · 0)))) = (5 + (5 + (0 + 5))) = 15 . *)
(* (5 op1.2 3) = (5 op1.1 (5 op1.2 2) = (5 op1.1 (5 op1.1 (5 op1.2 1))) = (5 op1.1 (5 op1.1 (5 op1.1 (5 op1.2 0)))) = (5 op1.1 (5 op1.1 (5 op1.1 (5)))) = 20. *)

Livello n, per n>2 (** nel 1° livello di PDNG **)

Poi, per ogni n>2, definisco l’operazione di “livello n” fra due numeri “a” e “b”:
“(a op1.n b)” definita in modo tale che
(a op1.n 0) = 1, e che
(a op1.n b) = (a op1.(n-1) (a op1.n p(b))) .
(* (a op1.3 b) è semplicemente la potenza fra numeri naturali a^b. *)
(* (5^3) = (5·(5^2)) = (5· (5· (5^1))) = (5·(5·(5·(5^0)))) = (5· (5· (5·1))) = 125 . *)
(* (5 op1.n 3) = (5 op1.(n-1) (5 op1.n 2)) = (5 op1.(n-1) (5 op1.(n-1) (5 op1.n 1))) = (5 op1.(n-1) (5 op1.(n-1) (5 op1.(n-1) (5 op1.n 0)))) = (5 op1.(n-1) (5 op1.(n-1) (5 op1.(n-1) 1))) . *)
(*** La “op1.3” è la potenza, la “op1.4” è una nuova operazione, per esempio: (a op1.4 5) = a^(a^(a^(a^a)))) , le altre operazioni sono definite analogamente. ***)

(** I differenti valori di op1.n in 0 sono dovuti al fatto che op1.0 è una operazione unaria, mentre le altre sono operazioni binarie. In realtà, comunque la motivazione principale è stata quella di ottenere i valori “giusti” solo per le operazioni canoniche “successivo”, “somma”, “prodotto” e “potenza”, dal momento che il valore in 0 non risulta utile ai fini del PDNG, e che ci basta il valore delle op1.n in 1 . **)

Successione di livello 1 di PDNG
A questo punto considero la successione di “livello 1” del PDNG che definisco come **s1(0)=0 , se n>=0 s1(n)= (n op1.n n)**.

(*** A questo punto vale la pena di stimare i valori che si ottengono con queste operazioni e i valori della successione s1:
s1(0) = 0;
s1(1) = 2;
s1(2) = 4;
s1(3) = 27;
s1(4) è dell’ordine di 10^(10^153);
s1(5) non ho idea di cosa significhi in pratica, ma dai precedenti numeri si dovrebbe avere una idea di come … non si abbia idea di come cresca questa successione;
s1(6) … ***)

2° livello di PDNG

Livello 0 (nel 2° livello di PDNG **)**
Considero l’operazione di “livello 0” (in questo livello di PDNG) di un numero n, che chiamo “op2.0”, che consiste semplicemente nell’associare, ad ogni elemento di s1, il successivo elemento in s1, che indico con “op2.0(n)).
(* Di fatto questa è l’operazione “successivo” non più “di un numero naturale”, cioè che si ottiene lavorando nell’insieme dei numeri naturali, o meglio: “non più nella successione s0”, come si è fatto all’inizio del 1° livello di PDNG (nel definire la “op1.0”), ma lavorando solo nell’insieme dei numeri della successione s1 definita al termine del lavoro nel livello precedente.*)

Livello 1 (nel 2° livello di PDNG **)**
Poi definisco l’operazione di “livello 1” fra due numeri “a” e “b” come :
(a op2.1 b) = (s1(a op1.1 b) op1.(a op1.1 b) s1(a op1.1 b))
(** di fatto ho semplicemente incrementato i numeri in questione, che erano, oltre ad “a” e “b”, anche il numero dell’operazione, e questo fa crescere enormemente il numero ottenuto. **)
(*** Mi immagino che l’introdurre l’aumento del numero dell’operazione in funzione di a e di b faccia perdere le poche proprietà che potevano essere rimaste per le operazioni di livello 1 . ***)

Livello n, per n>1 (nel 2° livello di PDNG **)**
Poi, se n>1, definisco l’operazione di “livello n” fra due numeri “a” e “b” come :
(a op2.n b) = (s1(a op2.(n-1) b) op1.(a op2.(n-1) b) s1(a op2.(n-1) b)) .

Successione di livello 2 di PDNG
A questo punto considero la successione di “livello 2” del PDNG che definisco come **s2(0)=0 , se n>=0 s2(n)= (n op2.n n)**.

3° livello di PDNG

Livello 0 (nel 3° livello di PDNG **)**
Considero l'operazione di "livello 0" (in questo livello di PDNG) di un numero n, che chiamo "op3.0", che consiste semplicemente nell'associare, ad ogni elemento di s2, il successivo elemento in s2, che indico con "op3.0(n)).
(* Di fatto questa è del tutto analogo a quanto fatto precedentemente. *)

Livello 1 (nel 3° livello di PDNG **)**
Ora definisco non più l'operazione di "livello 1" fra due numeri "a" e "b", ma la successione s3.1 di livello 1.
Opero come in tutto il livello 2 di PDNG, ma con "s2" al posto di "s1", "s3.1" al posto di "s2", "op3.1.n" al posto di "op2.n" e "op2.n" al posto di "op1.n".
Quindi **s2(0)=0 , se n>=0 s2(n)= (n op2.n n)**.

Livello m, per m>1 (nel 3° livello di PDNG **)**
Ora per m>1 definisco non più l'operazione di "livello m" fra due numeri "a" e "b", ma la successione s3.m di livello m.
Opero come in tutto il livello 2 di PDNG, ma con "sm" al posto di "s1" (*** ovviamente è la successione, non l'elemento***), "s3.m" al posto di "s2", "op3.m.n" al posto di "op2.n" e "op2.n posto di "op1.n".
Quindi **s3.m(0)=0 , se z>0 s3.m(z)= (z op3.m.z z)**.

Successione di livello 3 di PDNG
A questo punto considero la successione di "livello 3" del PDNG che definisco come **s3(0)=0 , se z>0 s3(z)= (z op3.z z)**.
(** Chiamo questo ultimo processo "diagonalizzazione".**)

4° livello di PDNG

Volendo si può procedere, per ogni sottolivello del livello 4°, analogamente a quanto fatto nel livello 3°, e poi selezionare la successione del livello 4° come fatto sopra per “diagonalizzazione”, cioè prendendo la “diagonale” definendo, cioè **s4(0)=0 , se n>=0 s4(n)= (n op4.n n)**.

Altri livelli

Continuando “di questo passo”, quindi, per ogni n naturale si può definire un livello.
Ma rivedendo il tutto “globalmente”, dall’insieme delle successioni dei vari livelli si può quindi estrarre una successione per diagonalizzazione “complessiva” d1. in questo modo si è passati ad un livello di ordine superiore con un “salto”. (** chiamo questa fascia di livelli “d” **)
Come si è fatto fino ad ora si può quindi ripartire con il procedimento iniziale non più dalla successione dei naturali, ma da quest’ultima successione, sia per i numeri considerati, sia per il numero delle operazioni, ripetere ogni volta TUTTO il procedimento precedente e definire una nuova successione di successioni, con cui definire per diagonalizzazione una nuova successione d2 (della stessa fascia di ordini d).
Analogamente per altre successioni d3, … dn, in modo tale da potervi estrarrre per diagonalizzazione una nuova successione, e quindi “saltare” ad un livello superiore.
Il procedimento può quindi definirsi globalmente in modo ricorsivo, e definire una successione di livelli.
Ogni volta che per ogni n naturale definisco “espressamente” le successioni di ordine n, sono in grado di diagonalizzare e di definirne una nuova successione. Questà è “per definizione” di una fascia di ordini superiore.
Ma posso sempre e comunque considerare la successione di “salto di fascia” come il secondo termine di una successione “di più ampio respiro”, e passare ad una nuova fascia di ordine superiore.
Quindi se posso anche diagonalizzare sui vari “salti di fascia”, e procedere in tal senso senza poter avere alcuna limitazione.

N.B. Il tutto è molto simile a ciò che si ha con i transfiniti, ed è da questi che mi sono ispirato per definire questi “numeri grandi”.

Comunque, anche solo limitandomi ad un numero del “livello 2”, posto quello determinato dal mio anno di nascita (lo feci già nel gioco “postato” con i ragazzi della mia scuola: scelsi il mio anno di nascita per dare un vantaggio teorico” ai ragazzi (se avessero scelto con lo stesso criterio), che sono ovviamente nati dopo di me):
G=s2(1958) e lo chiamai G sia come iniziale del mio nome, sia come iniziale di “Grande”.

Il numero che scelgo di postare “oggi” è quello che scelsi già nel gioco “postato” con i ragazzi della mia scuola:

G=s2(1958) ,
che lo chiamai G sia come iniziale del mio nome, sia come iniziale di “Grande”.

(*scelsi il mio anno di nascita per dare un vantaggio “teorico” ai ragazzi (se avessero scelto con lo stesso criterio), che sono ovviamente nati dopo di me*).

Ripeto il numero postato:

G=s2(1958) .

Un’altra cosa che mi stupisce è che tale numero è effettivamente “grande”, e non pare di avere niente di “umano”, di “reale” o di “pratico”.
Di fatto sembra davvero equivalente ad “infinito”.
Ma per chi crede nell’immortalità dell’anima (o del corpo), supposto che il tempo (o qualcosa di simile) “continui ad esistere”, si ha che un tale numero di anni è raggiungibile! Allora nell’anno in cui lo farò (se succederà a me) potrò dire: «vedi che ci siamo arrivati? Sembrava impossibile che potesse accadere, e invece è solo un numero che al tempo in cui lo definii sembrava grandissimo, ma è più piccolo di tutti quelli che verranno ora, e che sono “la stragrande maggioranza”».